Absence de spectre absolument continu pour un opérateur d'Anderson à potentiel d'interaction générique

Hakim Boumaza

ABSENCE DE SPECTRE ABSOLUMENT CONTINU POUR UN OPÉRATEUR D'ANDERSON À POTENTIEL D'INTERACTION GÉNÉRIQUE

HAKIM BOUMAZA

RÉSUMÉ. Nous présentons un résultat d'absence de spectre absolument continu dans un intervalle de $\mathbb{R}$ pour un opérateur de Schrödinger aléatoire continu et à valeurs matricielles agissant sur $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^N$, pour $N \geq 1$ arbitraire, et dont le potentiel d'interaction est générique dans les matrices symétriques réelles. Pour cela, nous prouvons l'existence d'un intervalle d'énergies sur lequel a lieu la séparabilité et la stricte positivité des N exposants de Lyapounov positifs de l'opérateur. La méthode suivie, basée sur le formalisme de Fürstenberg et un résultat de théorie des groupes dû à Breuillard et Gelander, permet une construction explicite de l'intervalle d'énergie recherché.

ABRIDGED ENGLISH VERSION

The question of the Anderson localization remains mostly open for Anderson-Bernoulli models in dimension d higher than 2. Such an Anderson-Bernoulli model is given by a family of random operators of the form $H(\omega) = -\Delta + \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \omega_n V(x-n)$, acting on $L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{R}$, where V is supported in $[0,1]^d$ and the ω_n are independent and identically distributed (*i.i.d.*) Bernoulli random variables. Since [4], we know that there is exponential localization at the bottom of the almost sure spectrum of $H(\omega)$. In dimension 1, it is also known (see [6]) that there is localization on every compact interval away from a discrete set of critical energies. In dimension $d \geq 3$, it is commonly conjectured that for high energies, there exist extended states, as for dimension $d = 2$ it is conjectured that there is localization at every energies (except maybe a discrete set) like in the one-dimensional case. To tackle the question of the localization in dimension 2 at all energies, one can start to look at a slightly simpler model of a continuous strip $\mathbb{R} \times [0,1]$ in the plan. We consider the restriction $H_{\mathrm{cs}}(\omega)$ of $H(\omega)$ to $L^2(\mathbb{R} \times [0,1])$ with Dirichlet boundary conditions on $\mathbb{R} \times \{0\}$ and $\mathbb{R} \times \{1\}$. A possible approach to prove localization for $H_{\mathrm{cs}}(\omega)$ is to operate a discretization in the direction where the strip is bounded, which brings us to consider a quasi one-dimensional operator acting on $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^N$, with $N \geq 1$ an integer.

In the present article, we look at a particular example of such a quasi one-dimensional operator, denoted by $H_\ell(\omega)$ and defined at (1). In the expression of $H_\ell(\omega)$ appears a matrix-valued interaction potential V which is a real symmetric matrix. We prove, at corollary 2.2, a result of absence of absolutely continuous spectrum for $H_\ell(\omega)$ in an explicit compact interval $I(N,\ell)$ (for its expression, see (19)), for a V generic in the sense of the Lebesgue measure. According to Kotani theory, this absence of absolutely continuous spectrum is implied by the non-vanishing of the

Lyapunov exponents of $H_\ell(\omega)$, at least out of a set of energies of Lebesgue measure zero. We prove the positivity of the Lyapunov exponents of $H_\ell(\omega)$ at theorem 2.1, at least for small enough values of the length parameter ℓ. Using the formalism of Fürstenberg, we introduce the tranfer matrices associated to $H_\ell(\omega)$ at (3) and we shall prove that the Fürstenberg group $G(E)$ of $H_\ell(\omega)$ (*i.e.* the group generated by the support of the common law of the transfer matrices, defined at (4)) is equal to the whole symplectic group $\mathrm{Sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$, for all energies in $I(N,\ell)$, except those in a finite set. According to (4), it is sufficient to prove that the group generated by 2^N transfer matrices, $< T_{\omega^{(0)}}(E) |\, \omega^{(0)} \in \{0,1\}^N >$, is dense in $\mathrm{Sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$. Like in [2] and [3], we use a denseness criterion for finitely generated subgroups of real semisimple connected Lie groups, due to Breuillard and Gelander and stated at theorem 3.2. This criterion gives us the plan of the proof of proposition 3.1 which implies theorem 2.1. First, we give an explicit form of the transfer matrices, writing them as the exponential of explicit matrices $X_{\omega^{(0)}}(E,V)$ in the Lie algebra $\mathfrak{sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$ (see (7)). Then, we prove that the set $\mathcal{V}$ of interaction potentials $V \in \mathrm{S}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$ such that, for every $E \in \mathbb{R}$, the family $\{X_{\omega^{(0)}}(E,V)\}_{\omega^{(0)} \in \{0,1\}^N}$ does not generate $\mathfrak{sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$, is of Lebesgue measure zero. But, because a non-zero polynomial has only a finite number of roots, we prove that for $V \notin \mathcal{V}$, there exists a finite set $\mathcal{S}_{\mathrm{V}}$ such that for $E \notin \mathcal{S}_{\mathrm{V}}$, the family $\{X_{\omega^{(0)}}(E,V)\}_{\omega^{(0)} \in \{0,1\}^N}$ generates $\mathfrak{sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$. Then, for such V and E, we construct explicitely the real number ℓ_C and the interval $I(N,\ell)$ of theorem 2.1 such that we have (20). We can finally apply theorem 3.2 to the group $\mathrm{Sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$ to prove proposition 3.1.

Due to the use of the general criterion on Lie groups, we have been changing the dynamical nature of our problem on Lyapunov exponents to an algebraic problem on generating the Lie algebra $\mathfrak{sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$. This algebraic nature of the objects we are considering allows us to prove a result generic on V and implies the finiteness of the set $\mathcal{S}_{\mathrm{V}}$ (see theorem 2.1) of critical energies.

1. Introduction

La question de la localisation d'Anderson reste largement ouverte pour des modèles d'Anderson-Bernoulli en dimension d supérieure à 2. Un tel modèle est représenté par une famille d'opérateurs aléatoires de la forme $H(\omega) = -\Delta + \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \omega_n V(x-n)$, agissant sur $L^2(\mathbb{R}^d)\otimes\mathbb{R}$, où V est une fonction à support dans $[0,1]^d$ et les ω_n sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées (*i.i.d.*). Depuis [4], on sait que, pour ces modèles, il y a localisation exponentielle au voisinage du bord inférieur du spectre presque sûr de $H(\omega)$. Par contre, on ne sait pas s'il y a ou non localisation dynamique dans cette région. En dimension 1, il est connu (voir [6]) qu'il y a localisation dans tout intervalle d'énergie en dehors d'un ensemble discret d'énergies critiques. En dimension $d \geq 3$, il est communément conjecturé qu'aux grandes énergies, il existe des états délocalisés, tandis qu'en dimension $d=2$, il est conjecturé qu'il y a localisation à toutes les énergies, comme dans le cas unidimensionnel. Pour aborder la question de la localisation en dimension 2 à toutes les énergies, on peut commencer par s'intéresser à un modèle légèrement plus simple de bande continue $\mathbb{R}\times[0,1]$ dans le plan, en considérant la restriction $H_{\mathrm{bc}}(\omega)$ de $H(\omega)$ à $L^2(\mathbb{R}\times[0,1])$ avec conditions de Dirichlet aux bords de la bande, $\mathbb{R}\times\{0\}$ et $\mathbb{R}\times\{1\}$. Une approche possible pour tenter de prouver la localisation d'Anderson pour $H_{\mathrm{bc}}(\omega)$ est d'opérer une discrétisation dans la direction où la bande est de longueur finie, ce qui permet de se ramener à l'étude d'un opérateur quasi-unidimensionnel agissant sur $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^N$, où $N \geq 1$ est un entier.

A la section 2 de cet article, nous définirons précisement un tel opérateur quasi-unidimensionnel, noté $H_\ell(\omega)$, et nous présenterons un résultat d'absence de spectre absolument continu pour celui-ci et ce, pour un potentiel matriciel d'interaction générique. D'après le théorème R.A.G.E., l'absence de spectre absolument continu dans un intervalle d'énergies correspond à l'absence d'états diffusifs pour ces énergies. L'absence de spectre absolument continu est une première étape en vue de prouver la localisation d'Anderson. En vertu de la théorie de Kotani, l'absence de spectre absolument continu pour un opérateur de Schrödinger quasi-unidimensionnel dans un intervalle I est induite par la non annulation des exposants de Lyapounov de l'opérateur pour presque toutes les énergies dans I. Nous allons donc prouver un résultat de séparabilité des exposants de Lyapounov de $H_\ell(\omega)$ dans un certain intervalle I. Pour cela, nous allons démontrer que, pour presque tout potentiel matriciel d'interaction, le groupe de Fürstenberg de $H_\ell(\omega)$ est égal à tout le groupe symplectique $\mathrm{Sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$, pour presque toutes les énergies dans I. En cela, nous généralisons à un potentiel d'interaction générique, le résultat obtenu dans [3]. Comme dans [2] et [3], nous aurons recours à un critère de densité de sous-groupes dans les groupes de Lie réels connexes semi-simples dû à Breuillard et Gelander ([5]). Ce critère ramène notre problème dynamique de stricte positivité des exposants de Lyapounov à un problème algébrique de génération de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$. C'est cette nature algébrique des objets en jeu qui permet de passer du cas particulier étudié dans [3] au cas générique obtenu ici.

2. Modèle et résultats

Nous étudions le modèle d'Anderson-Bernoulli suivant :

$$(1)\quad H_\ell(\omega) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,x^2} \otimes I_{\mathrm{N}} + V + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \omega_1^{(n)} \mathbf{1}_{[0,\ell]}(x-\ell n) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_N^{(n)} \mathbf{1}_{[0,\ell]}(x-\ell n) \end{pmatrix}$$

agissant sur $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^N$. On suppose que $N \geq 1$ est un entier, que $\ell > 0$ est un réel et que V est une matrice symétrique réelle d'ordre N (l'espace de telles matrices est noté $\mathrm{S}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$). Pour $i \in \{1, \dots, N\}$, les $(\omega_i^{(n)})_{n\in\mathbb{Z}}$ sont des suites de variables aléatoires *i.i.d.* sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ de loi commune ν telle que $\{0, 1\} \subset \operatorname{supp} \nu$ et $\operatorname{supp} \nu$ est borné. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $\omega^{(n)} = (\omega_1^{(n)}, \dots, \omega_N^{(n)})$ qui est de loi $\nu^{\otimes N}$.
Dans le résultat suivant, la généricité s'entend au sens de la mesure de Lebesgue sur $\mathrm{S}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$ identifiée à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{\frac{N(N+1)}{2}}$.

Théorème 2.1. *Pour presque tout $V \in \mathrm{S}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$, il existe un ensemble fini $\mathcal{S}_{\mathrm{V}} \subset \mathbb{R}$ et un réel $\ell_C = \ell_C(N) > 0$ tels que, pour tout $\ell \in]0, \ell_C[$, il existe un intervalle compact $I(N, \ell) \subset \mathbb{R}$ dans lequel les N exposants de Lyapounov positifs $\gamma_1(E), \dots, \gamma_N(E)$ de $H_\ell(\omega)$ vérifient :*

$$(2)\qquad \forall E \in I(N, \ell) \setminus \mathcal{S}_{\mathrm{V}}, \quad \gamma_1(E) > \cdots > \gamma_N(E) > 0.$$

Corollaire 2.2. *Pour presque tout* $V \in \mathrm{S_N}(\mathbb{R})$ *, pour tout* $\ell \in]0, \ell_C[$*,* $H_\ell(\omega)$ *n'a pas de spectre absolument continu dans* $I(N, \ell)$*, presque sûrement en* ω *(où* ℓ_C *et* $I(N, \ell)$ *sont donnés au théorème 2.1).*

3. Principe de démonstration des résultats

Nous commençons par introduire les matrices de tranfert de l'opérateur $H_\ell(\omega)$. Soit $E \in \mathbb{R}$. La matrice de transfert de ℓn à $\ell(n+1)$ de $H_\ell(\omega)$ est définie par la relation

$$\begin{pmatrix} u(\ell(n+1)) \\ u'(\ell(n+1)) \end{pmatrix} = T_{\omega^{(n)}}(E) \begin{pmatrix} u(\ell n) \\ u'(\ell n) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

où $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ est solution du système différentiel du second ordre $H_\ell(\omega)u = Eu$. On introduit alors, pour tout réel E, le groupe de Fürstenberg de $H_\ell(\omega)$:

$$G(E) = \overline{< T_{\omega^{(0)}}(E) | \ \omega^{(0)} \in \mathrm{supp}\ \nu^{\otimes N} >} \supset < T_{\omega^{(0)}}(E) | \ \omega^{(0)} \in \{0,1\}^N > . \tag{4}$$

Proposition 3.1. *Pour presque tout* $V \in \mathrm{S_N}(\mathbb{R})$ *, il existe un ensemble fini* $\mathcal{S}_\mathrm{V} \subset \mathbb{R}$ *et un réel* $\ell_C > 0$ *tels que, pour tout* $\ell \in]0, \ell_C[$*, il existe un intervalle compact* $I(N, \ell)$ *tel que :*

$$\forall E \in I(N, \ell) \setminus \mathcal{S}_\mathrm{V}, \quad G(E) = \mathrm{Sp_N}(\mathbb{R}) . \tag{5}$$

Cette proposition implique le théorème 2.1 d'après [1, Proposition IV.3.4]. Pour démontrer la proposition 3.1, nous utilisons le résultat suivant de théorie des groupes dû à Breuillard et Gelander.

Théorème 3.2 (Breuillard et Gelander, [5])**.** *Si* G *est un groupe de Lie connexe réel semi-simple, d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$*, alors il existe un voisinage de l'identité* $\mathcal{O} \subset G$*, sur lequel* $\log = \exp^{-1}$ *est un difféomorphisme et tel que* $g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{O}$ *engendrent un sous-groupe dense dans* G *si et seulement si* $\log(g_1), \ldots, \log(g_m)$ *engendrent* $\mathfrak{g}$*.*

Ce théorème fait le lien entre une propriété topologique de densité d'un sous-groupe engendré par un nombre fini d'éléments et une propriété algébrique d'engendrer une algèbre de Lie. Il constitue un critère explicite qui nous donne le plan de la démonstration de la proposition 3.1. Tout d'abord nous calculons explicitement les matrices de tranfert $T_{\omega^{(0)}}(E)$ pour tout $E \in \mathbb{R}$ et tout $\omega^{(0)} \in \{0,1\}^N$.
Posons

$$M_{\omega^{(0)}}(E) = V + \mathrm{diag}(\omega_1^{(0)} - E, \ldots, \omega_N^{(0)} - E). \tag{6}$$

Alors, si on note

$$X_{\omega^{(0)}}(E, V) = \begin{pmatrix} 0 & I_\mathrm{N} \\ M_{\omega^{(0)}}(E) & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

on obtient $T_{\omega^{(0)}}(E) = \exp(\ell X_{\omega^{(0)}}(E, V))$.
L'idée est que, pour ℓ suffisamment petit et E pas trop grand, les logarithmes des $T_{\omega^{(0)}}(E)$ valent $\ell X_{\omega^{(0)}}(E, V)$. On regarde donc pour quelles valeurs de E et V la famille $\{X_{\omega^{(0)}}(E, V)\}_{\omega^{(0)} \in \{0,1\}^N}$, notée $\{X_1(E, V), \ldots, X_{2^N}(E, V)\}$, engendre $\mathfrak{sp}_\mathrm{N}(\mathbb{R})$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit

$$\mathcal{V}_k = \left\{ (X_1, \ldots, X_k) \in (\mathfrak{sp}_\mathrm{N}(\mathbb{R}))^k \mid (X_1, \ldots, X_k) \text{ n'engendre pas } \mathfrak{sp}_\mathrm{N}(\mathbb{R}) \right\} . \tag{8}$$

Comme engendrer l'algèbre $\mathfrak{sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$ est une condition algébrique du type non annulation d'une famille finie de déterminants (finie car, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}[T_1, \dots, T_m]$ est noethérien), il existe $Q_1, \dots, Q_{r_k} \in \mathbb{R}[(\mathfrak{sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R}))^k]$ tels que :

(9)

$$\mathcal{V}_k = \left\{(X_1, \dots, X_k) \in (\mathfrak{sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R}))^k \mid Q_1(X_1, \dots, X_k) = 0, \dots, Q_{r_k}(X_1, \dots, X_k) = 0\right\}.$$

Ici, on fait l'identification $\mathbb{R}[(\mathfrak{sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R}))^k] \simeq \mathbb{R}[T_1, \dots, T_{k(2N^2+N)}]$. Soient $E \in \mathbb{R}$ et

$$\mathcal{V}_{(E)} = \{V \in \mathrm{S}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R}) \mid \{X_1(E,V), \dots, X_{2^N}(E,V)\} \text{ n'engendre pas } \mathfrak{sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})\}. \tag{10}$$

On montre que $\mathrm{Leb}_{\frac{N(N+1)}{2}}(\mathcal{V}_{(E)}) = 0$. En effet, soit

$$f_E \;:\; \begin{array}{ccc} \mathrm{S}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R}) & \to & (\mathfrak{sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R}))^{2^N} \\ V & \mapsto & (X_1(E,V), \dots, X_{2^N}(E,V)) \end{array}. \tag{11}$$

Alors, f_E est polynômiale en les $\frac{N(N+1)}{2}$ coefficients définissant V et on a :

$$V \in \mathcal{V}_{(E)} \;\Leftrightarrow\; (Q_1 \circ f_E)(V) = 0, \dots, (Q_{r_{2^N}} \circ f_E)(V) = 0, \tag{12}$$

chaque $Q_i \circ f_E$ étant polynômiale en les $\frac{N(N+1)}{2}$ coefficients définissant V. Or, on peut démontrer que, pour tout $E \in \mathbb{R}$, si V_0 désigne la matrice symétrique tridiagonale ayant une diagonale nulle et tous les coefficients de ses sur et sous-diagonales égaux à 1, alors $V_0 \notin \mathcal{V}_{(E)}$ (voir [3, Lemme 1]). Donc, il existe $i_0 \in \{1, \dots, r_{2^N}\}$ tel que $(Q_{i_0} \circ f_E)(V_0) \neq 0$ et, comme la fonction $Q_{i_0} \circ f_E$ est polynômiale et non identiquement nulle,

$$\mathrm{Leb}_{\frac{N(N+1)}{2}}(\{V \in \mathrm{S}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R}) \mid (Q_i \circ f_E)(V) = 0)\}) = 0, \tag{13}$$

et, par inclusion,

$$\mathrm{Leb}_{\frac{N(N+1)}{2}}(\mathcal{V}_{(E)}) = 0. \tag{14}$$

Enfin, soit $\mathcal{V} = \cap_{E \in \mathbb{R}} \mathcal{V}_{(E)}$. Alors $\mathcal{V}$ est de mesure de Lebesgue nulle et, si $V \notin \mathcal{V}$, il existe $\mathcal{S}_{\mathrm{V}} \subset \mathbb{R}$ fini tel que, pour tout $E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}_{\mathrm{V}}$, $\{X_1(E,V), \dots, X_{2^N}(E,V)\}$ engendre $\mathfrak{sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$. En effet, si $V \in \mathrm{S}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{V}$, il existe $E_0 \in \mathbb{R}$ tel que la famille $\{X_1(E_0,V), \dots, X_{2^N}(E_0,V)\}$ engendre $\mathfrak{sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$. Donc, il existe $i_0 \in \{1, \dots, r_{2^N}\}$ tel que $(Q_{i_0} \circ f)(E_0, V) \neq 0$ où :

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathrm{S}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R}) & \to & (\mathfrak{sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R}))^{2^N} \\ (E,V) & \mapsto & (X_1(E,V), \dots, X_{2^N}(E,V)) \end{array}. \tag{15}$$

Or, pour V fixé, $E \mapsto (Q_{i_0} \circ f)(E,V)$ est polynômiale et non identiquement nulle, elle n'a donc qu'un ensemble fini $\mathcal{S}_{\mathrm{V}}$ de zéros et, pour tout $E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}_{\mathrm{V}}$, $(Q_{i_0} \circ f)(E,V) \neq 0$, soit encore,

$$\forall E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}_{\mathrm{V}}, \; \{X_1(E,V), \dots, X_{2^N}(E,V)\} \notin \mathcal{V}_{2^N}. \tag{16}$$

Nous souhaitons maintenant appliquer le théorème 3.2 pour $V \notin \mathcal{V}$ et $E \notin \mathcal{S}_{\mathrm{V}}$. Soient $\lambda_1^{\omega^{(0)}}, \dots, \lambda_N^{\omega^{(0)}}$ les valeurs propres réelles de $M_{\omega^{(0)}}(0) \in \mathrm{S}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$ et soient

(17)

$$\lambda_{\min} = \min_{\omega^{(0)} \in \{0,1\}^N} \min_{1 \leq i \leq N} \lambda_i^{\omega^{(0)}}, \; \lambda_{\max} = \max_{\omega^{(0)} \in \{0,1\}^N} \max_{1 \leq i \leq N} \lambda_i^{\omega^{(0)}} \text{ et } \delta = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{2}.$$

Si $\mathcal{O}$ désigne le voisinage de l'identité donné par le théorème 3.2 pour $G = \mathrm{Sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$, on pose $\mathrm{d}_{\log \mathcal{O}} = \max\{R > 0 \mid B(0,R) \subset \log \mathcal{O}\}$, où $B(0,R)$ désigne la boule de centre 0 et de rayon $R > 0$ pour la topologie induite par la norme matricielle sur $\mathfrak{sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$ induite par la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^{2N}$. Soient

$$\ell_C = \min\left(1, \frac{\mathrm{d}_{\log\,\mathcal{O}}}{\delta}\right) \tag{18}$$

et, pour $\ell \in]0, \ell_C[$,

$$I(N,\ell) = \left[\lambda_{\max} - \frac{\mathrm{d}_{\log\,\mathcal{O}}}{\ell}, \lambda_{\min} + \frac{\mathrm{d}_{\log\,\mathcal{O}}}{\ell}\right] \neq \emptyset. \tag{19}$$

Alors, pour $\ell \in]0, \ell_C[$,

$$\forall\, \omega^{(0)} \in \{0,1\}^N,\ \forall E \in I(N,\ell), \quad \ell X_{\omega^{(0)}}(E) \in \log \mathcal{O} \tag{20}$$

et, pour tout $E \in I(N,\ell)$, $\log T_{\omega^{(0)}}(E) = \ell X_{\omega^{(0)}}(E)$, puisque exp est un difféomorphisme de $\log \mathcal{O}$ sur $\mathcal{O}$. Enfin, comme $V \notin \mathcal{V}$, pour $E \in I(N,\ell) \setminus \mathcal{S}_{\mathrm{V}}$, la famille $\{\ell X_{\omega^{(0)}}(E,V)\}_{\omega^{(0)} \in \{0,1\}^N}$ engendre $\mathfrak{sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$. Par le théorème 3.2, pour $E \in I(N,\ell) \setminus \mathcal{S}_{\mathrm{V}}$, $< T_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \{0,1\}^N >$ est dense dans $\mathrm{Sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$ et $G(E) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$ pour ces mêmes énergies. Cela démontre la proposition 3.1 et par là-même le théorème 2.1. Le corollaire 2.2 en découle en utilisant la théorie de Kotani et Simon sur le spectre absolument continu (voir [7]).

Références

[1] P. Bougerol and J. Lacroix, *Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger Operators*, Progr. Probab. Statist. **8**, Birkhäuser, Boston, (1985)

[2] H. Boumaza, *Positivity of Lyapunov exponents for a continuous matrix-valued Anderson model*, Math. Phys. Anal. Geom. **10**(2), 97–122 (2007), DOI :10.1007/s11040-007-9023-6

[3] H. Boumaza, *Localization for a matrix-valued Anderson model*, Math. Phys. Anal. Geom. **12**(3), 255–286 (2009), DOI :10.1007/s11040-009-9061-3

[4] J. Bourgain and C.E. Kenig, *On localization in the continuous Anderson-Bernoulli model in higher dimension*, Invent. Math. **161**(2) 389–426 (2005)

[5] E. Breuillard and T. Gelander, *On dense free subgroups of Lie groups*, J. Algebra **261**(2), 448–467 (2003)

[6] D. Damanik and R. Sims and G. Stolz, *Localization for one-dimensional, continuum, Bernoulli-Anderson models*, Duke Mathematical Journal **114**, 59–99 (2002)

[7] S. Kotani and B. Simon, *Stochastic Schrödinger operators and Jacobi Matrices on the Strip*, Commun. Math. Phys. **119**(3), 403–429 (1988)

E-mail address: `boumaza@math.univ-paris13.fr`

UMR CNRS 7539 - Département de Mathématiques, Institut Galilée, Université PARIS 13, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 VILLETANEUSE, FRANCE